

## Bikvadratikus interpoláció TIN felületmodellben

Kalmár János, Gribovski Katalin, Benedek Judit

MTA CSFK GGI

kalmar55@gmail.hu

**ÖSSZEFOGLALÓ.** A háromszögbázisú felületmodellek teszik lehetővé az eredeti mérési pontokra illeszkedő interpolációt, ha az alappontok nem raster mentén helyezkednek el a síkon, hanem szabálytalanul, véletlenszerűen. Ha csak az alappontokban ismert magasságot vesszük figyelembe, akkor kizárólag a háromszögenkénti síkillesztés jöhet szóba, mint folytonos véges elem interpoláció. Lokális szélsőérték (minimum vagy maximum) pontok keresésekor a síkillesztés csak az alappontokban találhat extrémumot, a lefedő háromszögeken belül nem. Ezen javítandó olyan háromszögenként bikvadratikus véges elem felületinterpolációt dolgoztunk ki, mely nemcsak az alappontokra illeszkedik, hanem bizonyos parciális deriváltakra is, és folytonos a határoló éleken. A megvalósításhoz kétféle becslést használtunk a parciális deriváltak kiszámításához.

**ABSTRACT.** Biquadratic interpolation in TIN (triangulated irregular network) surface model – Triangle-based surface model allows interpolation to the original measurement points in case they are not on the raster, but the measured base points are randomly (irregularly) distributed. If in the modelling only the elevation of base points are taken into account, then the interpolation surface can be generated by triangular element interpolation exclusively. It is a well-known fact that local extrema for the surface generated by triangular faces are located at the vertices of triangular faces. In order to improve the position of the local extrema a smooth surface have to be generated with a surface-fitting technique, using biquadratic interpolation. The smooth fitting of biquadratic local surfaces along the edges is realised using an adequate estimation for the partial derivatives at the base points. Here is a short summarization about the article in English language.

### 1. Bevezetés

Szabálytalan alappont-hálózat esetén háromszögbázisú (TIN) modelleket [1] használunk felület-interpolációra, ami alapja pl. a felszín-ábrázolásnak [2], a terület, illetve térfogatszámításoknak [3], a lejtési irány meghatározásának [4]. Az alappontok számának ésszerű csökkentésével [5] kisebb tár és időigényű – de kevésbé pontos - TIN modellek is levezethetők [6], illetve az egyszerűbb kezelhetőség érdekében rácsbázisú modellre is áttérhetünk [7].

A legegyszerűbb TIN bázisú véges-elem approximáció a síkillesztés ( $z = a_0 + a_1x + a_2y$ ), ahol a három csúcspontban csak a magassági illeszkedést írjuk elő a paraméterek  $(a_0, a_1, a_2)$  meghatározásához. A másodfokú (bikvadratikus) polinomnak hat ((1) képlet), a harmadfokú (bikubikus) polinomnak pedig tíz [5] paramétere van. Magasabb fokú polinom becslésekhez viszont legalább annyi feltételi egyenletet kell felírni, ahány paraméter van, ezért a magassági illeszkedésen túl további feltételekre van szükség [8]. Továbbá természetes igény,

hogy a háromszögeken definiált becslő függvények folytonosan kapcsolódjanak egymáshoz, aminek szükséges feltétele a paraméterek és a független illeszkedési egyenletek számának egyezése.

Ha TIN modellünkben lokális szélsőértéket (minimum vagy maximum) keresünk, akkor a síkillesztés csak az alappontokban találhat extrémumot, a lefedő háromszögek belsejében nem. Ezen javítandó olyan háromszögenként bikvadratikus véges elem felületinterpolációt dolgoztunk ki, mely illeszkedik az alappontokra, és folytonos az élek mentén. A megvalósításhoz kétféle becslést használtunk a parciális deriváltak kiszámításához.

## 2. Bikvadratikus interpoláció

Illesszünk háromszögenként egy

$$p(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy + a_4x^2 + a_5y^2 \quad (1)$$

alakú másodfokú polinomot a felületre. A  $p(x, y)$  becslő polinom meghatározásához háromszögenként csak három magassági illeszkedési feltételt tudunk felírni:

$$z_i = a_0 + a_1x_i + a_2y_i + a_3x_iy_i + a_4x_i^2 + a_5y_i^2, i = 1, 2, 3 \quad (2)$$

Ha a háromszög csúcspontjaiban a felület normálvektora vagy gradiense ismert, tehát pl. a  $\frac{\partial p(x_i, y_i)}{\partial x} = p_x(x_i, y_i)$  és  $\frac{\partial p(x_i, y_i)}{\partial y} = p_y(x_i, y_i), i = 1, 2, 3$  parciális deriváltak ismertek, akkor pontonként további két illeszkedési egyenletet írhatunk fel:

$$p_x(x_i, y_i) = a_1 + a_3y_i + 2a_4x_i, p_y(x_i, y_i) = a_2 + a_3x_i + 2a_5y_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (3)$$

A (3) képletek 6 egyenlete most 5 paramétert tartalmaz, ezért a felületelemek illeszkedése nem biztosított. Ha figyelembe vesszük a (2) feltétel is, akkor 9 egyenletet kapunk, melyhez 6 paraméter tartozik, ami nem biztosítja a felületelemek pontos illeszkedését. Ha bikubikus (harmadfokú) interpolációt alkalmazunk, az előbbiekhöz hasonlóan 9 illeszkedési egyenletünk lesz 10 paraméterrel, ami nem vezet egyértelmű megoldáshoz. Annak érdekében, hogy egyértelműen megoldható egyenletrendszerhez jussunk, feltételi egyenleteket írunk fel a  $d_{i,j}$  iránymenti deriváltakra vonatkozólag. Jelölje  $t_{i,j} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}$  az  $i$  és  $j$  pontok távolságát, akkor:

$$d_{i,j} = p_x(x_i, y_i) \cos \alpha + p_y(x_i, y_i) \sin \alpha, \quad (4)$$

ahol

$$\sin \alpha = (y_j - y_i)/t_{i,j} \text{ és } \cos \alpha = (x_j - x_i)/t_{i,j}. \quad (5)$$

Minden háromszög élnek csak az egyik végpontjában írjuk fel az irány menti derivált illeszkedését:

$$d_{i,j} = a_1 \cos \alpha + a_2 \sin \alpha + a_3(y_i \cos \alpha + x_i \sin \alpha) + 2a_4x_i \cos \alpha + 2a_5y_i \sin \alpha, \quad (6)$$

ahol  $d_{i,j}$  értékét a 3. fejezetben ismertetett valamelyik becslési eljárással adjuk meg. A (2) és (6) feltételek 6 egyenletből álló 6 ismeretlent tartalmazó egyenletrendszerhez vezetnek, ezért egyértelműen meghatározottak az (1) képlettel megadott felület paraméterei, amennyiben a feltételi egyenletek függetlenek. Ez belátható az egyenletrendszer mátrixának vizsgálatával, melynek többoldalas levezetésétől most eltekintünk, továbbá igazolható, hogy a rendszer determinánsa csak akkor lesz nulla, ha a háromszög három csúcspontja egy egyenesre illeszkedik, vagyis a  $v_i(x_i, y_i, 1), i = 1, 2, 3$  vektorok nem függetlenek. Ha a háromszög egy élére szűkítjük az (1) becslést, akkor ott egy 3 paraméteres egyváltozós másodfokú polinomot kapunk, mely (2) miatt illeszkedik az él végpontjaira, illetve (4) miatt az egyik végpontban az

iránymenti derivált az él meredekségét írja elő – a feltételek és a paraméterek száma megegyezik, ezért a másodfokú polinom egyértelműen meghatározott. Szomszédos háromszögek közös élén ugyanazon egyváltozós polinom-szűkítéshez jutunk, ha biztosított, hogy az iránymenti meredekséget mindkét háromszög ugyanazon csúcspontjában írtuk elő. Ez elérhető pl. úgy, hogy mindig a kisebb azonosítójú ponttól a nagyobb azonosítójú pont felé mutató irányt ( $i < j$ ) vesszük figyelembe. A fentiek miatt az él-szomszéd háromszögek felületbecslésének másodfokú határgörbéje a közös élén egybeesik, ezért a (2) és a (6) feltételeken alapuló véges elem interpoláció a háromszöghálóban mindenütt folytonos lesz.

### 3. A gradiens vektor becslése az alappontokban

Ha mérési pontonként csak a magasságok ismertek, de a magasabb rendű felületinterpolációhoz szükség van az alappontokban a felület gradiensének ismeretére, akkor a következőképpen járhatunk el:

Ha háromszögenként az alappontokra síkot illesztünk, vagyis egy  $z(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y$  bilineáris függvényt, akkor a háromszöghöz tartozó gradiens vektor komponensei  $\nabla z(x, y) = (a_1, a_2)$ . Nekünk viszont nem egy háromszöghöz, hanem egy  $P_0(x_0, y_0)$  alapponthez rendelt (becsült) gradiensre van szükségünk, de erre a pontra a háromszögháló több háromszöge is illeszkedik - jelölje számukat  $m$ , és teljesüljön  $m \geq 3$ . A legegyszerűbb becslés az alappontra illeszkedő háromszögek gradiensvektorai átlagának választása:

$$p_{x0} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m a_{1j}, \quad p_{y0} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m a_{2j} \quad (7)$$

A továbbiakban megadunk egy másik becslési eljárást a  $P_0(x_0, y_0)$  alapponthez tartozó gradiensre vonatkozólag. Ehhez feltételezzük, hogy az  $(a_{1j}, a_{2j})$  gradiens csak a  $j$  – dik háromszög  $(x_{sj}, y_{sj})$  súlypontjában érvényes. Becsüljük bilineáris regresszióval a gradiens komponenseit  $P_0$ -ban:

$$p_x(x_0, y_0) = a_x + b_x x_0 + c_x y_0 \quad p_y(x_0, y_0) = a_y + b_y x_0 + c_y y_0 \quad (8)$$

Az  $(x_{sj}, y_{sj})$  súlypontokra vonatkozó illeszkedési feltételekkel határozhatjuk meg a (8) képlettel megadott  $(p_x, p_y)$  gradiens bilineáris becslésének  $(a_x, b_x, c_x)$  illetve  $(a_y, b_y, c_y)$  paramétereit:

$$a_{1j} = a_x + b_x x_{sj} + c_x y_{sj}, \quad a_{2j} = a_y + b_y x_{sj} + c_y y_{sj}, \quad j = 1, \dots, m \quad (9)$$

A (9) szétválasztható egyenletrendszer (8) megoldása az  $(a_{1j}, a_{2j})$  gradiensek súlyozott átlaga lesz, mert a két lineáris egyenletrendszer alaplátrixa megegyezik, mindkét mátrix  $j$  – dik sora  $(1, x_{sj}, y_{sj})$  alakú. Természetesen a (7) becslés is az  $(a_{1j}, a_{2j})$  gradiensek egyensúlyú átlaga volt.

### 4. Lokális szélsőérték keresés a bikvadratikus interpoláció alapján

A (2) és (6) feltételek alapján illesszünk (1) egyenlettel megadott bikvadratikus becslést a TIN modell minden háromszögére. Láttuk, hogy a becslés folytonossága a háromszög élek mentén biztosított, és az (1) egyenlettel megadott másodfokú felületnek nemcsak a háromszög csúcspontjaiban lehet lokális szélsőértéke (1. ábra). A továbbiakban meghatározzuk ezen lokális szélsőérték helyét. Az (1) becsülő függvény első rendű parciális deriváltjainak  $(x_0, y_0)$  gyöke (8) képletek alapján számítható, ami a szélsőérték hely meghatározásának szükséges feltétele:

$$x_0 = \frac{a_2 a_3 - 2a_1 a_5}{4a_4 a_5 - a_3^2}, \quad y_0 = \frac{a_1 a_3 - 2a_2 a_4}{4a_4 a_5 - a_3^2} \quad (10)$$

A szélsőérték létezésének elégséges feltétele, hogy a

$$p_{xx}(x_0, y_0)p_{yy}(x_0, y_0) - p_{xy}(x_0, y_0)^2 > 0 \text{ feltétel teljesüljön, ami ebben az esetben a:} \quad (11)$$

$$4a_4 a_5 - a_3^2 > 0$$

feltételhez vezet, ebből adódik, hogy a (10) képletek nevezője nem lehet 0. Mivel  $p(x, y)$  becslő függvény lokálisan csak a háromszögön értelmezett, ezért nem csak azt kell ellenőrizni (11) alapján, van-e szélsőérték az  $(x_0, y_0)$  pontban, hanem azt is, hogy az  $(x_0, y_0)$  pont belső pontja-e a háromszögnek. Ha igen, akkor az  $a_4$  paraméter előjelének vizsgálatával eldönthető, hogy  $p(x, y)$  becslő függvénynek lokális minimuma vagy maximuma van-e az  $(x_0, y_0)$  pontban. Ha  $a_4 < 0$ , akkor  $(x_0, y_0)$  lokális maximum pont, ellenkezőleg lokális minimum pont. A felület globális szélsőérték pontját ezután a véges sok lokális szélsőérték nagyságának összehasonlításával kapjuk. Ha a  $p(x, y)$  felület-becslésnek  $(x_0, y_0)$ -ban nincs szélsőértéke, vagy  $(x_0, y_0)$  nem belső pontja a háromszögnek, akkor még lehet lokális szélsőérték a véges értelmezési tartomány (a háromszög) határán. A háromszöget három egyenes szakasz határolja, melyeken az (1) kvadratikus becslés parabola ívekre esik szét. Tegyük fel, hogy  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$  és  $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$  pontok egy olyan háromszög oldalélét feszítik ki, ahol a felszín becslését az (1) képletű  $p(x, y)$  bikvadratikus polinom szolgáltatja, melyre a (2) feltételek miatt természetesen teljesül  $p(x_1, y_1) = z_1$ , és  $p(x_2, y_2) = z_2$ . Legyen  $\Delta x = x_2 - x_1$ ,  $\Delta y = y_2 - y_1$  és  $\Delta z = z_2 - z_1$ , akkor a  $P_1 P_2$  egyenes egy paraméteres előállítását az

$$x(t) = x_1 + (\Delta x)t, \quad y(t) = y_1 + (\Delta y)t \quad \text{és} \quad z(t) = z_1 + (\Delta z)t \quad (12)$$

képletek szolgáltatják, ahol  $x(0) = x_1$ ,  $x(1) = x_2$ ,  $y(0) = y_1$ ,  $y(1) = y_2$  teljesül. A felszín becslésére előállított  $p(x, y)$  polinomnak a háromszög  $P_1 P_2$  oldalára korlátozott alakja:

$$p(t) = p(x(t), y(t)) = z_1 + (a_1 \Delta x + a_2 \Delta y + a_3(x_1 \Delta y + y_1 \Delta x) + 2a_4 x_1 \Delta x + 2a_5 y_1 \Delta y)t + \\ + (a_3 \Delta x \Delta y + a_4 (\Delta x)^2 + a_5 (\Delta y)^2)t^2.$$

$p(0) = z_1$  és  $p(1) = z_2$  feltételek alapján, illetve némi átalakítás után kapjuk:

$$p(t) = z_1 + (\Delta z)t + (a_3 \Delta x \Delta y + a_4 (\Delta x)^2 + a_5 (\Delta y)^2)(t^2 - t), \text{ ami (12) alapján átírható:}$$

$$p(t) = z(t) + (a_3 \Delta x \Delta y + a_4 (\Delta x)^2 + a_5 (\Delta y)^2)(t - 1)t \quad (13)$$

alakba. Ez alapján közvetlenül leolvasható a  $p(t)$  becslésnek a  $z(t)$  egyenestől való eltérése:

$$p(t) - z(t) = (a_3 \Delta x \Delta y + a_4 (\Delta x)^2 + a_5 (\Delta y)^2)(t - 1)t. \quad (14)$$

A szakasz végpontjaiban (ahol  $t = 0$  illetve  $t = 1$ ) a (14) eltérés természetesen nulla. (13) összefüggés alapján:

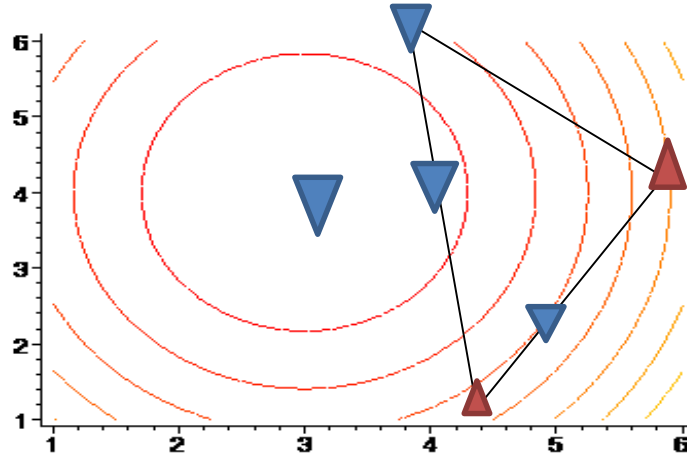
$$p'(t) = \Delta z + (a_3 \Delta x \Delta y + a_4 (\Delta x)^2 + a_5 (\Delta y)^2)(2t - 1).$$

A  $p(t)$  függvény szélsőértékét deriváltjának  $t_0$  gyökében találjuk:

$$t_0 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\Delta z}{a_3 \Delta x \Delta y + a_4 (\Delta x)^2 + a_5 (\Delta y)^2} \right). \quad (15)$$

Minket csak a  $P_1 P_2$  szakaszra eső szélsőértékek érdekelnek, ezért, ha a  $0 \leq t_0 \leq 1$  feltétel teljesül, akkor a szélsőérték helye és értéke a  $P(x(t_0), y(t_0), p(t_0))$  pontban lesz:

$$x_0 = x_1 + (\Delta x)t_0, \quad y_0 = y_1 + (\Delta y)t_0, \quad z_0 = z_1 - t_0^2(a_3 \Delta x \Delta y + a_4 (\Delta x)^2 + a_5 (\Delta y)^2).$$



1. ábra. Bikvadratikus felület globális és lokális szélsőérték pontjai (kék – min, piros – max)

Az 1. ábrán egy forgási parabola szintvonalrajza, illetve egy rá illesztett háromszögön található extrémális pontok vannak feltüntetve.

## 5. Egy kvadratikus spline interpoláció levezetése

Láttuk, hogy az (1) bikvadratikus becslésnek egy szakaszra vonatkozó (13) megszorítása tulajdonképpen a (16) képletű  $g(t)$  függvény, amit a szakasz  $P_i(t_i, m_i)$  végpontjaival ( $i = 1, 2$ ) és az egyik végpontban a derivált (meredekség)  $Q_i(t_i, d_i)$  értékével adunk meg:

$$g(t) = a + bt + ct^2 \quad (16)$$

Tehát a (16) másodfokú becslő polinom három paraméterének egyértelmű meghatározásához (17) négy illeszkedési feltételből használjuk fel az első hármat:

$$\begin{aligned} a + bt_1 + ct_1^2 &= m_1 & a + bt_2 + ct_2^2 &= m_2 \\ b + 2ct_1 &= d_1 & b + 2ct_2 &= d_2 \end{aligned} \quad (17)$$

A (18) képletek határozzák meg a parabola  $(a, b, c)$  paramétereit a (17) illeszkedési egyenletek alapján az  $(m_1, m_2, d_1)$  feltételeket kielégítően, majd a kapott megoldást behelyettesítjük az illeszkedési feltételek utolsó  $(d_2)$  egyenletébe:

$$\begin{aligned} a &= \frac{t_1^2 t_2 d_1 + t_1^2 m_2 - t_2^2 t_1 d_1 - 2t_1 t_2 m_1 + t_2^2 m_1}{(t_1 - t_2)^2}, & b &= -\frac{t_1^2 d_1 + 2t_1 m_2 - t_2^2 d_1 - 2t_1 m_1}{(t_1 - t_2)^2}, & c &= \frac{t_1 d_1 + m_2 - t_2 d_1 - m_1}{(t_1 - t_2)^2} \\ d_2 - b - 2ct_2 &= d_1 + d_2 - 2\frac{m_2 - m_1}{t_2 - t_1} \end{aligned} \quad (18)$$

Látható, hogy az így kapott kifejezés akkor lesz nulla (akkor a negyedik,  $(d_2)$  illeszkedési egyenlet az  $(m_1, m_2, d_1)$  illeszkedési egyenletek következménye), ha a deriváltak átlaga egyenlő az ismert függvényértékekből számolt differencia-hányadossal, vagyis:

$$\frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{m_2 - m_1}{t_2 - t_1} \quad (19)$$

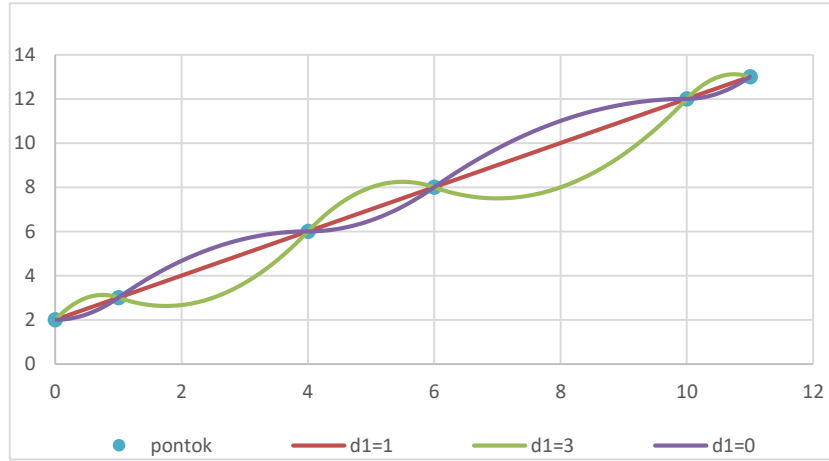
Tehát egy folytonos és folytonosan differenciálható kvadratikus spline interpolációhoz juthatunk úgy, hogy csak egy alappontban (pl. peremértékként) írjuk elő a deriváltat, a többi alappontban pedig szomszédról szomszédra ugrálva a (19)-ből levezetett (20) képlet alapján indukcióval számítjuk a deriváltak megfelelő értékét. Ez a derivált-becslés biztosítani fogja azt, hogy szakaszonként a (17) illeszkedési egyenletek alapján felírt (16) kvadratikus becslő

polinomok (21) együtthatókkal számított megoldásai folytonosan és egyszer folytonosan differenciálhatóan kapcsolódjanak egymáshoz a  $P_i$  alappontokban.

$$d_{i+1} = 2 \frac{m_{i+1} - m_i}{t_{i+1} - t_i} - d_i, \quad a_i = \frac{t_i^2 t_{i+1} d_i + t_i^2 m_{i+1} - t_{i+1}^2 t_i d_i - 2 t_i t_{i+1} m_i + t_{i+1}^2 m_i}{(t_i - t_{i+1})^2} \quad (20)$$

$$b_i = -\frac{t_i^2 d_i + 2 t_i m_{i+1} - t_{i+1}^2 d_i - 2 t_i m_i}{(t_i - t_{i+1})^2}, \quad c_i = \frac{t_i d_i + m_{i+1} - t_{i+1} d_i - m_i}{(t_i - t_{i+1})^2}, \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (21)$$

A 2. ábrán ugyanazon pontsorozatra illesztett, kezdő meredekségükben eltérő spline függvények láthatók.



2. ábra. A kezdő meredekség hatása a spline-interpolációra

A (19) képlet segítségével egy másik interpolációs feladat megoldását is levezethetjük. Tegyük fel, hogy a keresett függvény  $Q_i(t_i, d_i)$  deriváltjait az összes alappontban ismerjük, viszont peremfeltételként csak egy pontban ismert a  $P_1(t_1, m_1)$  függvényérték. Keressük tehát a (17) feltételekből az  $(m_1, d_1, d_2)$  illeszkedési egyenletekre leszűkített (16) bázisfüggvényű folytonos és folytonosan deriválható spline interpolációt. Fejezzük ki (19) képletből  $d_2$  helyett az  $m_2$  paramétert, akkor az alábbi indukciós összefüggéshez jutunk:

$$m_{i+1} = m_i + (t_{i+1} - t_i) \frac{d_i + d_{i+1}}{2} \quad (22)$$

A szakaszonként becslő polinomok paramétereit meghatározó (21) képletek továbbra is érvényben maradnak, mert (22) alapján rendelkezésre áll az összes függvényérték, és (19) teljesülése miatt a sima folytonosság is biztosított. A (22) képlet út-idő-sebesség viszonylatban egyébként úgy interpretálható, hogy az egyes útszakaszokat az elején és a végén mért sebességek átlagával teljesítjük.

## 6. Összefoglaló

Olyan TIN bázisú bikvadrátikus véges-elem felületinterpolációt konstruáltunk, ahol a szomszédos felületelemek folytonosan illeszkednek egymáshoz, mert a magassági illeszkedési feltételek mellett a háromszög-élek mentén az iránymenti deriváltak egyezését írtuk elő. Az iránymenti deriváltak az alappontokban becsült parciális deriváltakból vezettük le, melyeket viszont a háromszögenkénti síkillesztések normálvektorai súlyozott átlagaként állítottuk elő.

A bikvadrátikus felületinterpoláció alapján meghatároztuk a lokális szélsőérték létezésének feltételeit és konkrét pozícióit.

Folytonos és egyszer folytonosan differenciálható egyváltozós kvadratikus spline interpolációt határoztunk meg úgy, hogy a deriváltra (meredekségre) kezdőértéket csak egy pontban kell megadni, és a szakaszonkénti polinom-együtthatók egymástól függetlenül határozhatók meg.

### Köszönetnyilvánítás.

A publikáció a Magyar Tudományos Akadémia Bolyai János kutatási ösztöndíjának (BO/00324/18) és az Innovációs és Technológiai Minisztérium, ÚNKP-19-4-IV-SOE-5 pályázati kódszámú Új Nemzeti Kiválósági Programjának szakmai támogatásával készült.

### Irodalomjegyzék

- [1] **Kalmár J.** (1986): Digital surface model on a triangular base, *Acta Geod. Geoph. et Mont.* 21, 71-79.
- [2] **Bartels R. H., Beatty J. C., Barsky B. A.** (1987): An Introduction to Splines for Use in Computer Graphics and Geometric Modeling, in 1st Edition The Morgan Kaufmann Series in Computer Graphics, pp. 476.
- [3] **Kalmár J., Papp G., Szabó T.** (1995): DTM based surface and volume approximation with geophysical applications, *Computers & Geosciences* 21(2), 245-247. doi: [10.1016/0098-3004\(94\)00069-7](https://doi.org/10.1016/0098-3004(94)00069-7)
- [4] **Kalmár J., Benedek J.** (2017): A vízterhelés, a vízgyűjtő és vízvásztó vonalak meghatározása az eső beszivárgásának és szétfolyásának modellezésével, *Dimenziók, Matematikai Közlemények* 5, 25-29. doi: [10.20312/dim.2017.04](https://doi.org/10.20312/dim.2017.04)
- [5] **Kalmár J.** (1994) A digitális terepmodell kutatások új eredményei, kandidátusi értekezés.
- [6] **Benedek J., Papp G., Kalmár J.** (2018): Generalization techniques to reduce the number of volume elements for terrain effect calculations in fully analytical gravitational modelling. *Journal of Geodesy*, 92(4), 361-381. doi: [10.1007/s00190-017-1067-1](https://doi.org/10.1007/s00190-017-1067-1)
- [7] **Nagy D., Franke R., Battha L., Kalmár J., Papp G., Závoti J.** (1999): Comparison of various gridding methods, *Acta Geod. et Geoph.* 34(1-2), 41-57. doi: [10.1007/BF03325556](https://doi.org/10.1007/BF03325556)
- [8] **Ahlberg J. H., Nielson E. N., Walsh J. L.** (1967): The Theory of Splines and Their Applications, in *Mathematics in 1st Edition Science and Engineering*, 38, pp 296.